

石取りゲームの必勝法

1 ねらい

今日の KGS 研究Ⅰの授業では、「石取りゲーム」を実際に碁石を使って取り組みながら、その「必勝法」にかかわる数学的な規則性を発見し論証してもらいます。さらにゲームのルールを徐々に複雑化し、その考えを発展させます。このような“数学的活動”の体験から、数学のよさを再認識し、数学的論拠に基づいて判断できるようになって欲しいと考えています。さらに、「石取りゲームの必勝法」は、ルールを変形させることによってさまざまな数学的考察が必要となっていきます。最後まであきらめずに頑張りましょう。では、スタートです！

2 石取りゲームとは…

- * 2人で対戦する。パスはなしで必ず石をとる。
- * 碁石をいくつかの山に分けておき、ルールに従って交互に石を取っていく。
- * 最後の石を取った方の勝ち！（石が取れなくなった方が負け）とする。

【碁石を使って、実際に2人でゲームをやってみよう！】

3 実践 その1 「1山くずし」

- ◇ ルール①
- (1) 山は 1つ。
 - (2) 1回に 1個～3個 取ることができる。
 - (3) 山の碁石を最初は 30個 で始め、その後、個数を変えてみる。

問1 どうしたらこのゲームに勝つことができるだろうか？ ゲームをしながら2人で考えてみよう。
2人で考えたことを書こう。後で発表してもらいます。



問2 1回に取れる碁石の個数を 1個～3個 から、1個～4個 に変えたらどうなるだろうか？ 考えてみよう。
2人で考えたことを書こう。後で発表してもらいます。



<POINT>

◇ このゲームを考えていく上で、説明上、次の言葉を使用する。

* ある自分の手番になったとき、

- I 正しい取り方を繰り返せば、必ず勝つことができる局面を「勝ち型」という。つまり、「勝ち型」とは、自分が取り方を今後失敗しなければ、相手がどんな手を打っても自分が勝てる局面のこと。
- II どのような取り方をしても自分が勝つことができない局面を「負け型」という。つまり、「負け型」とは、相手が失敗した手を打たない限り自分が負けてしまう局面のこと。つまり、相手が勝ち型になっていること。
- III 自分が勝ち型でなければ、自分は負け型である。逆に、自分が負け型でなければ、自分は勝ち型である。

課題1 ルール①の(2)を「直前に相手が取った石の個数以下だけ取ることができる。ただし、最初に取る人は全部取らない限り何個でも取ることができる。」と変えた場合はどうなるだろうか？(3)の最初の碁石の個数を変えながら考察せよ。

課題2 さらに(2)を「直前に相手が取った石の個数の2倍以下だけ取ることができる。ただし、最初に取る人は全部取らない限り何個でも取ることができる。」と変えた場合はどうなるだろうか？(3)の最初の碁石の個数を変えながら考察せよ。

4 実践 その2 「2山くずし」

◇ ルール②

- (1) 山は 2つ。
- (2) 1回に取れる個数の制限はなし。ただし、2山にまたがって取ることはできない。
- (3) 山の碁石を最初は 15個 → 8個と7個 (= (8, 7)と表すことにする)に分けて始め、その後、2山の碁石の個数を変えてみる。



課題3 ルール②の(2)を「1つの山から任意の個数を取るか、または両方の山から同数ずつ取ることができる。」と変えた場合はどうなるだろうか？

5 実践 その3 「3山くずし」

◇ ルール②

- (1) 山は 3つ。
- (2) 1回に取れる個数の制限はなし。ただし、2山にまたがって取ることはできない。
- (3) 山の碁石を最初は 24個 → 8個、8個、8個 (= (8, 8, 8)と表すことにする)に分けて始め、その後、3山の碁石の個数を変えてみる。

問4 どうしたらこのゲームに勝つことができるだろうか？ ゲームをしながら2人で考えてみよう。

2人の考えたことを書こう。後で発表してもらいます。



◇ ここまでくるとかなり複雑になり必勝法を求めるのも大変です。そこで、次の問にしたがって考えてみよう。

◇ 今後、(○, ○, ○)とは、3山に分けた碁石の個数を表す。

1組()番 氏名()

問5 次の状態になっているときには、次の手に勝ち型がある。それを見つけよう。

(1) (4 , 1 , 0) →

(2) (4 , 3 , 4) →

(3) (7 , 2 , 1) →

問6 自分が碁石を次の状態にしたときは、自分にとって「勝ち型」、つまり相手にとっての「負け型」となる。□の中の個数を何個にして、相手に渡せばよいか考えよう。あてはまるものすべて求めよう。

(1) (2, 1, □)

(2) (3, 1, □)

(3) (3, 2, □)

(4) (4, 1, □)

(5) (4, 2, □)

(6) (4, 3, □)

<POINT>

【必勝判定の基本原則】

- 1 自分が負け型になっているときは、相手が間違えずに取ったなら自分の負け型は変わらない(相手が必ず勝ってしまう)。
- 2 自分が勝ち型になっているときは、相手が何個取っても、自分の番で、もう一度自分が勝ち型になる手が必ずある(自分の勝ち型は変わらない)。
- 3 自分が勝ち型になっているときは、相手は負け型になっている。

問7 3山の碁石の数 (a, b, x) において、 a, b の碁石の個数がわかっているとき、自分の番で x の碁石をいくつにすれば自分にとって「勝ち型」、つまり相手にとっての「負け型」となるか実際に碁石を使って考え、次の 4×4 の表を完成させよう。その際、問6も参考にしよう。

$a \backslash b$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

問8 この表を完成させながら、気付いた特徴をあげてみよう。

問9 次の 8×8 の表を、問7で気付いた規則性等も考慮しながら碁石を使わず完成させてみよう。

$a \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
...										

問10 問8の表に現れている数字全体を見て、何か気付いた規則性をあげてみよう。

課題4 問10の規則性から、 (a, b, x) において、自分の手番で x の碁石をいくつにすれば自分にとっての「勝ち型」になるか、任意の a, b に対して直接的に求められるような方法はないか考えよう。

課題5 3山ぐずしの必勝法を一般化させて考えてみよう。

【本日のまとめ】

最後に この石取りゲームは、有限型の不偏ゲーム(①確定性 ②完全情報性 ③対称性 ④有限性)と言います。これをさらに発展させていくと3山ぐずしが、 n 山ぐずしまで一般化させることができます。そこには数学的構造がたくさん潜んでいます。

1組()番 氏名()